

INTRODUZIONE

«Procedere assiomaticamente non è altro che pensare consapevolmente» (David Hilbert)

Ai teoremi di incompletezza per i sistemi matematici formali – noti anche come “teoremi di Gödel” – non poteva che capitare la sorte che in genere capita ai più grandi risultati scientifici. A distanza di molti decenni dalla loro scoperta (oramai quasi un secolo) suscitano un interesse sempre crescente nella riflessione filosofica. Se tanti però si rivolgono ad essi in modo inopportuno, cercando di far dire loro ciò che proprio non possono dire, la riflessione filosofica più seria li considera per ciò che essi sono stati davvero, vale a dire un passaggio cruciale non soltanto della storia della logica moderna, ma anche del dibattito sui fondamenti della matematica e delle altre scienze cosiddette “esatte” svoltosi all’inizio del secolo scorso.

E non poteva essere altrimenti dato che questi teoremi hanno dato una risposta inequivocabile ad una domanda divenuta nel tempo sempre più urgente: è possibile fornire una giustificazione rigorosa della matematica classica, mostrando che essa è davvero la più sicura di tutte le scienze? A questa domanda non era legata soltanto la certezza della matematica, ma anche quella di tutte quelle discipline scientifiche che da essa mutuavano la nozione di rigore, oltre al linguaggio o ai metodi dimostrativi. Rispondendo *negativamente* a questa domanda, i teoremi di Gödel hanno chiuso un’epoca di discussioni accese tra orientamenti diversi e hanno inaugurato una nuova era dell’indagine sui fondamenti dalla quale sono nati indirizzi di ricerca nuovi, anche al di là dei confini della matematica e della logica. La teoria della computabilità, lo sviluppo dei calcolatori digitali e molte discussioni nell’intelligenza artificiale, ad esempio, sarebbero impensabili senza questi teoremi o perlomeno senza molti dei metodi impiegati per dimostrarli. Per di più, da quando sono stati scoperti hanno indotto filosofi e uomini di scienza a interrogarsi a più riprese sul significato dell’incompletezza della matematica per molti ambiti della filosofia (ad esempio per l’epistemologia o la filosofia della mente), come pure per la ricerca nelle altre scienze. Proprio di qui hanno visto la luce alcune interpretazioni peregrine dei risultati di incompletezza da cui non solo dovette prendere le distanze lo stesso Kurt Gödel mentre era ancora in vita, ma sulle quali i filosofi, gli storici e gli scienziati più avveduti sono chiamati periodicamente a fare chiarezza.

In questo volume ho cercato di sfuggire alle trappole in cui spesso cadono i filosofi quando si confrontano con i teoremi di Gödel; quando, cioè, facendosi ammaliare da facili similitudini (che in realtà sono solo miraggi) si lanciano in interpretazioni suggestive che nulla hanno a che fare con l'incompletezza della matematica. Ho cercato di farlo evitando di leggere i teoremi di Gödel fuori dal loro contesto di riferimento, ossia quello che fa da sfondo alla loro scoperta, rappresentato dall'assiomatica moderna. Allo stesso tempo, però, non ho rinunciato a pormi una domanda filosofica a cui sarebbe stato possibile rispondere attraverso le metodologie dell'indagine storica (ricostruzione di contesti, analisi di documenti, considerazione critica delle fonti, ecc.). Mi sono chiesto in particolare: che cosa i teoremi di incompletezza permettono di mettere in luce della natura del metodo assiomatico moderno (al di là di alcuni suoi aspetti già noti agli studiosi) e del modello di conoscenza che su questo metodo è andato costruendosi nelle scienze esatte? Faccio solo pochi esempi, quelli che mi sembrano più indicativi. Si sa che il metodo assiomatico moderno dev'essere inteso come un metodo ipotetico-deduttivo, che la sua natura è astratta e si è evoluto in senso formale. Si crede parimenti che lo stadio assiomatico rappresenti il punto più maturo nell'evoluzione di una scienza, la quale strutturandosi in tal senso raggiungerebbe una certa stabilità. Si ritiene, infine, che una scienza si sviluppi modernamente in senso assiomatico quando è possibile ricavare i suoi risultati da principi privi di evidenza posti fin dall'inizio. Appunto, le cose stanno davvero così o – per esser più precisi – è tutto qui ciò che si può dire del metodo assiomatico moderno? Oppure di esso si può dire anche altro e ciò che di altro si può dire dà a queste affermazioni un significato così poco convenzionale da mettere questo metodo e le scienze che ad esso si rifanno sotto una luce per certi versi nuova?

I teoremi di Gödel permettono di rispondere a questa domanda per ciò che essi hanno rappresentato dal punto di vista storico. Collocandosi infatti al confine di due epoche, essi costituiscono un punto d'osservazione privilegiato per guardare sia ciò che c'è stato prima che ciò che è venuto dopo: meglio ancora, per guardare ciò che è venuto dopo a partire da ciò che c'è stato prima e nel contempo ciò che c'è stato prima a partire da ciò che è venuto dopo, mettendo in atto una fusione di orizzonti che, come insegna la migliore tradizione ermeneutica, è il segreto di un'autentica comprensione storica. In particolare, quando si fa di questi teoremi il centro dell'indagine, si riescono a cogliere aspetti dell'assiomatica moderna prima di Gödel che in realtà si espliciteranno solo dopo, quando i teoremi da lui scoperti chiuderanno alcune strade dell'indagine sui fondamenti e ne apriranno di nuove; come pure aspetti che emergono nell'assiomatica moderna dopo i risultati ottenuti dal logico moravo che sarebbe sbagliato leggere in contrapposizione alla storia precedente. Come sempre nella storia, anche in

questo caso vi sono tanto punti di discontinuità quanto punti di continuità che si intrecciano e considerare gli uni senza gli altri – o accentuare troppo gli uni a discapito degli altri – non permette di comprendere adeguatamente come effettivamente stiano le cose.

Questo lavoro è il risultato di alcuni approfondimenti che ho svolto negli ultimi anni su di un argomento – il dibattito sui fondamenti delle scienze esatte intorno ai teoremi di Gödel – che frequento da un po' di tempo. Circa dieci anni fa i risultati delle mie ricerche sono confluiti in un volume che ho pubblicato con l'editore Carocci dal titolo *Da Hilbert a von Neumann. La svolta pragmatica nell'assiomatica* (2013). Lì ho ricostruito dettagliatamente, avendo presenti i dibattiti storiografici più rilevanti degli ultimi decenni, tanto l'evoluzione delle indagini di David Hilbert fino alla scoperta dei teoremi di Gödel quanto la riflessione metodologica di John von Neumann dalla scoperta di questi teoremi fino alle sue tarde considerazioni fondazionali. Nel contempo, ho rilevato che nel passaggio da Hilbert a von Neumann, attraverso la scoperta dei teoremi di incompletezza, si è compiuta la svolta pragmatica dell'assiomatica moderna, nella misura in cui quest'ultima ha inglobato al proprio interno criteri di giustificazione mutuati dall'effettiva pratica scientifica. I risultati di quel libro qui sono solo sullo sfondo dato che, piuttosto che sulla descrizione di un processo, mi è sembrato più interessante puntare l'attenzione sul carattere del metodo assiomatico moderno e sul modello di conoscenza che ne consegue. Anche per questo il volume non ha un andamento diacronico: non si tratta di narrare una storia, ma di comprendere la natura di un certo modo di fare scienza.

Sono quattro i capitoli che strutturano questo studio. Il primo ha un carattere introduttivo in quanto disegna in modo sintetico il quadro entro cui inserire gli approfondimenti specifici degli altri capitoli. Al suo interno, in particolare, si descrive il modo in cui è emerso il modello assiomatico moderno, si precisa in che senso dal mio punto di vista Hilbert dev'esserne considerato il padre e si osserva il modo in cui questo modello si è evoluto dopo la scoperta dei teoremi di Gödel. Si pone enfasi sulla figura scientifica di von Neumann perché, se è vero che i teoremi di incompletezza hanno scritto la parola "fine" sull'ambizione di giustificare una volta per tutte e in modo assiomatico l'intero plesso delle scienze esatte, il matematico ungherese non può non assumere un ruolo centrale nella storia dell'assiomatica moderna. Le ragioni di questo giudizio sono tre: *a)* von Neumann ha partecipato attivamente al progetto hilbertiano di una giustificazione assiomatica definitiva delle scienze matematiche; *b)* ha avuto un ruolo tutt'altro che secondario nella scoperta dei teoremi di incompletezza ed è stato il primo a riconoscere che con essi cadeva la speranza di fondare in modo rigoroso quelle scienze; *c)* è stato colui che, dopo la scoperta dell'incompletezza, ha ripensato lo schema hilbertiano per i fondamenti delle scienze senza rinun-

ciare al metodo assiomatico e leggendolo in una chiave diversa (pragmatica) ma per nulla estranea alla Scuola di Hilbert.

In questa prospettiva seguono poi alcuni approfondimenti specifici. Nel secondo capitolo mi chiedo che tipo di metodo sia dal punto di vista procedurale il metodo assiomatico di Hilbert. Si tratta di una questione tutt'altro che ovvia, sulla quale gli studiosi si sono espressi in modo contrastante. In particolare, a partire dalla funzione che il matematico tedesco ha sempre attribuito a questo metodo, individuo innanzitutto quali condizioni una buona interpretazione del metodo assiomatico di Hilbert deve soddisfare. Subito dopo esamino le interpretazioni presenti nella letteratura rilevante sul tema, valutando tanto i loro punti di forza quanto le loro debolezze, dato che nessuna di esse soddisfa tutte le condizioni individuate. Infine, propongo un'interpretazione più inclusiva, che valorizza i punti di forza delle altre interpretazioni e nel contempo è capace di superarne i limiti. Si tratta di un'interpretazione che ricavo dai testi in cui Hilbert si è esplicitamente espresso sulla natura del metodo assiomatico e che si dimostra perfettamente aderente alla funzione che egli gli attribuiva, vale a dire quella di essere lo strumento da privilegiare nell'approfondimento dei fondamenti delle scienze.

Nel terzo capitolo mi soffermo sul ruolo svolto da von Neumann nella vicenda iniziale dei teoremi di incompletezza. Che egli avesse partecipato attivamente alla loro scoperta e che fosse stato il primo a decretare chiusa un'intera stagione dell'indagine sui fondamenti erano cose note da tempo. Io stesso le avevo considerate nel mio lavoro precedente. Tuttavia, la pubblicazione di alcuni materiali inediti negli ultimi anni, oltre ad alcune ipotesi che nel frattempo sono state avanzate sul ruolo svolto da von Neumann all'interno della vicenda, richiede che si riconsiderino le cose con attenzione. Inoltre, ciò che avevo sostenuto prima in forma congetturale, oltre a potersi precisare notevolmente, trova ora delle conferme importanti che vale la pena esplicitare. Chi legge questo capitolo vi troverà alcuni chiarimenti relativi al percorso che, stante quanto è noto oggi, condusse Gödel alla scoperta dell'incompletezza (e alla pubblicazione del celebre articolo del '31), come pure altri riguardanti il ruolo svolto al suo interno da von Neumann. Non solo; troverà anche una confutazione dei tentativi che nella letteratura rilevante sul tema sono stati fatti per spiegare la scoperta di von Neumann del secondo teorema di incompletezza, oltre alle linee di un argomento che invece, fonti alla mano, è possibile ricostruire al loro posto per rendere ragione della scoperta di un risultato straordinario altrimenti incomprensibile. Sono infine esplicitate le ragioni che portarono il matematico ungherese a sostenere fin da subito che l'incompletezza rendeva irrealizzabile l'idea di una giustificazione definitiva in senso assiomatico della matematica classica.

Se è vero che dopo la scoperta dell'incompletezza von Neumann non rinunciò all'impiego del metodo assiomatico nell'indagine sui fondamenti, ma alla luce dei risultati gödeliani ripensò questo impiego in una chiave pragmatica per nulla estranea alla Scuola di Hilbert, si deve capire quali siano gli aspetti pragmatici presenti nel modo in cui tanto il maestro quanto l'allievo concepivano e praticavano il metodo assiomatico. È questo l'approfondimento che svolgo nel quarto capitolo. Al suo interno, in particolare, considero l'assiomatica di Hilbert nei due momenti fondamentali della sua evoluzione – ossia prima e dopo la svolta rappresentata dalla teoria della dimostrazione – e la metodologia della scienza che von Neumann ideò su base assiomatica dopo la scoperta dei teoremi di incompletezza. Si tratta chiaramente di aspetti pragmatici che non contraddicono, ma sono in continuità con le caratteristiche del metodo assiomatico così come emergono dall'analisi del secondo capitolo.

Nella conclusione tiro le somme dell'intero percorso rispondendo in modo esplicito alla domanda su ciò che lo studio fatto rivela del metodo assiomatico moderno e del modello di conoscenza che su di esso è andato costruendosi nelle scienze esatte. Sarebbe difficile sintetizzare in poche righe le conclusioni a cui sono giunto; mi preme anticipare soltanto che dinamica, flessibile e da ultimo pragmatica si presenta la natura del metodo assiomatico moderno e similmente il modello di conoscenza che a partire da esso si presenta nell'indagine scientifica. Si tratta di un'indagine che di conseguenza non può che considerarsi come sempre aperta.

Ad eccezione del terzo capitolo del tutto inedito, gli altri capitoli di questo volume nascono dalla rielaborazione di alcuni contributi pubblicati in inglese o in italiano negli ultimi anni, i quali riguardavano argomenti che si sovrapponevano in alcuni punti e di conseguenza suggerivano una loro trattazione monografica. I contributi che ho rielaborato rispettivamente nel primo, nel secondo e nel quarto capitolo sono i seguenti:

- *L'assiomatizzazione della matematica e le ricadute dei teoremi di Gödel*, in P. PECERE (a cura di), *Il libro della natura*, Vol. II: *Scienze e filosofia da Einstein alle neuroscienze contemporanee*, Carocci, Roma 2015, 229-264.
- *On the Procedural Character of Hilbert's Axiomatic Method*, "Quaestio" 19 (2019), 459-482.
- *Success and Opportunism in Hilbert's and von Neumann's Methodological Reflections*, "Revue d'études benthamiennes" 18 (2020).

Sono grato all'editore Carocci, in particolare a Gianluca Mori, a Brepols Publishers e alle Edizioni di Pagina, in particolare a Chris VandenBorre e Piero Cappelli, ai direttori di "Quaestio" Costantino Esposito e Pasquale Porro, al Centre Bentham e alla "Revue d'études benthamiennes", in parti-

colare alla direttrice Anne Brunon-Ernst, per aver autorizzato il libero utilizzo di questi contributi. Sono anche molto riconoscente al Magnifico Rettore della Pontificia Università Urbaniana, p. Leonardo Sileo, al Decano della Facoltà di Filosofia, don Aldo Vendemiati, e al Direttore della Urbaniana University Press, p. Luigi Sabbarese, per aver accolto con favore l'idea di pubblicare questo volume. La mia gratitudine non può poi non andare a tutti coloro (maestri, colleghi e amici) che in questi anni hanno letto bozze o versioni delle singole parti di questo volume e con i loro preziosi suggerimenti mi hanno aiutato a migliorarle: Luigi Borzacchini, Carlo Cellucci, Mario De Caro, Mirna Džamonja, Michèle Friend, Enrico Moriconi, Paolo Pecere, Piero Tarantino e Luca F. Tuninetti. Un ringraziamento speciale lo devo a Wilfried Sieg, che è sempre molto disponibile a darmi le sue autorevoli indicazioni, e a Marina von Neumann Whitman, per le autorizzazioni che mai mi nega a citare dai materiali inediti del padre, in questo caso da due lettere contenute in *The Papers of John von Neumann*, presso la Manuscript Division della Library of Congress di Washington D. C. Desidero infine ringraziare per i miglioramenti proposti chi ha revisionato in forma anonima questo lavoro, come pure Sandro Scalabrin e tutta la casa editrice per l'impegno profuso nel portare a termine la pubblicazione del volume.

Roma, 25 febbraio 2022